Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из математке -

Квазислучајни графови

Ученик:
Павле Мартиновић IVд

Ментор:
Лука Милићевић

Београд, јун 2019.

Садржај

1

Увод

У математици је опште познат појам случајног графа са вероватоћом p. То граф у коме је свака грана случајно изабрана са вероватноћом p. Међутим, та теорија нам не говори ништа о појединачним графовима. Основно питање које разматрамо у овом раду је: под којим условима се дати граф понаша као случајно изабран?

За нас је кључан појам квазислучајних графова. За граф кажемо да је квазислучајан када је број одређених стуктура унутар њега исти као у случајном графу неке вероватноће. Тачније, у квазислучајном графу ти бројеви за произвољно малу грешку одступају од очекиваних вредности величина у случајним графовима.

Како је услов квазислучајности доста јак, поставља се питање начина и тежине доказа да је одређен граф квазислучајан. Испоставља се да постоји читав низ еквивалентних услова који говоре да је граф квазислучајан, од којих је најпростији за разумевање и доказавање да је број циклуса дужине 4 у том графу једнак приближно очекиваној вредности. Због приступачности овог услова, он се сматра централним тврђењем које сведочи о квазислучајности.

У овом раду ћемо формалније увести појам квазислучајности, навести те услове који су еквивалентне са квазислучајношћу и доказати њихову еквиваленцију.

У остатку рада ћемо видети примену у оцнењивању Ремзијевих бројева. Прво ћемо се посветити Томасоновом раду, а затим Конлоновом раду, који су користећи теорију о квазислучајним графовима појачали најбоље познате горње оцене за Ремзијеве бројеве.

2

Уводни појмови

2.1 Основни графовски појмови

Сада ћемо увести пар основних дефиниција из теорије графова.

Дефиниција 2.1.1. *Граф* $G = (V, E)$ означава граф са скупом *чворова* V и скупом *грана* E. Такође, $G(n, e)$ означава граф $G = (V, E)$ где је $|V| = n$ и $|E| = e$, а $G(n)$ граф са $|V| = n$. Надаље ћемо користити V и E као скупове чворова и грана без посебне напомене.

Дефиниција 2.1.2. *Матрица инциденције* графа $G(n)$ је матрица $n \times n$, где је вредност у пољу (i, j) 1 ако су чворови са ознакама i, j повезани граном, а 0 у супротном.

Дефиниција 2.1.3. Кажемо да је граф $G' = (V', E')$ *подграф* графа $G = (V, E)$ ако постоји $1 - 1$ пресликавње $f : V' \to V$ тако да постоји грана $e' \in E'$ која повезује чворове $u, v \in V'$, само ако постоји грана $e \in E$ која повезује чворове $f(u)$ и $f(v)$.
Дефиниција 2.1.3 није стандардна дефиниција подграфа, већ инјективних хомоморфизама, али због тога колико се често овај термин користи у раду, користићемо овакву дефиницјиу.

Дефиниција 2.1.4. Кажемо да је граф $G' = (V', E')$ *индукован подграф* графа $G = (V, E)$ ако постоји $1 - 1$ пресликавње $f : V' \to V$ тако да постоји грана $e' \in E'$ која повезује чворове $u, v \in V'$, ако и само ако постоји грана $e \in E$ која повезује чворове $f(u)$ и $f(v)$.

2.2 Појам из линеарне алгебре

Сада ћемо увести неколико основних појмова и тврђења из линеарне алгебре које ће нам бити потребне даље у раду.

Дефиниција 2.2.1. *Траг* квадратне матрице A, који означавамо са $tr(A)$ је сума елемената матрице по главној дијагонали.

Дефиниција 2.2.2. *Сопствена вредност* квадратне матрице A димензија $n \times n$ је скалар λ за који важи $det(A - \lambda \cdot I) = 0$.

Када посматрамо матрице над пољем $\mathbb{R}$, како је вредност $det(A - \lambda \cdot I) = 0$ полином из $\mathbb{R}[\lambda]$ имамо следећа два тврђења (из основне теореме алгебре и Вијетових формула):

Лема 2.2.1. *У $\mathbb{C}$ постоји тачно n сопствених вредности квадратне матрице A димензија $n \times n$.*

Лема 2.2.2. *Сума сопствених вредности квадратне матрице A димензија $n \times n$ је једнака $tr(A)$.*

Такође је познато да су за симетричне матрице (а самим тим и за матрице инциденције сваког графа) све сопствене вредности реалне.

2.3 Додатне ознаке у графу

Дефиниција 2.3.1. За $v \in V$ дефинишемо *скуп суседа* $Nd(v) = \{x \in V | v, x \in E\}$, као скуп човорва који су граном директно повезани са v.

Дефиниција 2.3.2. За $v \in V$ дефинишемо *степен чвора* $d(v) = |Nd(v)|$, као број човорва који су граном директно повезани са v.

Дефиниција 2.3.3. За подскуп чворова $X \subset V$, са $e(X)$ означавамо број грана који повезују чворове из X.

Дефиниција 2.3.4. Број појављивања графа G' као подграфа графа G се означава са $N_G(G')$.

Дефиниција 2.3.5. Број појављивања графа G' као индукованог подграфа графа G се означава са $N^*_G(G')$.

Дефиниција 2.3.6. За $u, v \in V$ дефинишемо $S(u, v)$ као скуп човорва w који су граном директно повезани или и са оба од v и u, или ни са једним.

3

Квазислучајни графови

Идеја квазислучајних графова је да, ако за неки граф приближно важи неко својство које иначе важи за случајне графове са густином d, онда можемо да докажемо и да приближно важи цео низ других тврђења, које важе за случајне графове са том густином. Примера ради, ако дати граф G има циклуса дужине 4 колико и случајан граф са густином $\frac{1}{2}$ (што значи да има око $(\frac{n}{2})^4$), може се извести да G има око $(\frac{n}{2})^3$ троуглова.

Постоје два начина замишљања оваквих графова. Један начин је да се замисле као фамилије. Када кажемо да је неко својство еквивалентно са квазислучајности, то је обично значи да се за све графове из те фамилије нека величина разликује од очекиване величине $f(n)$ (где је n број чворова графа) за неку функцију која је $o(f(n))$. Самим тим у бесконачности (када узимамо графове са довољно чворова), то ће нам значити да се графови понашају "исто". Овај начин замисљања је битан због теоријског дела квазислучајних графова, где се изводи еквиваленција својстава квазислучајних графова.

Други начин је да за конкретан граф да кажемо да је сам по себи квазислучајан. Овај начин замишљања је примена квазислучајности, где можемо извести за неки граф конкретне оцене за одређене величине.

3.1 Централно тврђење

Сада ћемо навести скуп тврђења који су еквивалентна са квазислучајношћу графа чија је густина $\frac{1}{2}$. Са n означавамо број чворова у графу. За остале густине је поступак сличан.

- $P_1(s)$: За сваки граф M са s чворова важи

$$N_G^*(M) = (1+o(1))n^s 2^{-\binom{s}{2}}$$

- $P_2(t)$: За парно t, ако је C_t циклус са t чворова

$$e(V) \geq (1+o(1))\frac{n^2}{4} \ \wedge \ N_G(C_t) \leq (1+o(1))\left(\frac{n}{2}\right)^t$$

- P_3: Ако су $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ сопствене вредности матрице инциденције

$$e(V) \geq (1+o(1))\frac{n^2}{4} \ \wedge \ \lambda_1 = (1+o(1))\frac{n}{2} \ \wedge \ \lambda_2 = o(n)$$

- P_4: За сваки подскуп чворова $S \subset V$ важи

$$e(S) = \frac{|S|^2}{4} + o(n^2)$$

- P_5: За сваки подскуп чворова $S \subset V, |S| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ важи

$$e(S) = \left(\frac{1}{16} + o(1)\right)n^2$$

- P_6:

$$\sum_{u,v} \left| |S(u,v)| - \frac{n}{2} \right| = o(n^3)$$

Циљ је да се докаже да су сва ова тврђења еквивалентна. То значи да се да ако за неки граф је неко тврђење од ових важи са функцијом грешке $h(n)$ која је $o(f(n))$, онда се за свако друго тврђење може извести функција грешке $h'(n)$, која је $o(g(n))$, за одговарајуће f, g из дефиниција тврђења. Ту долази следећа теорема

Теорема 3.1.1. За $s \geq 4$ и парно $t \geq 4$ важи

$$P_2(4) \implies P_2(t) \implies P_1(s) \implies P_3 \implies P_4 \implies P_5 \implies P_6 \implies P_2(4)$$

одакле важи да су сва тврђења међусобно еквивалентна.

Интересантно је да је од свих ових тврђења $P_2(4)$ изгледа најслабије, али ипак је подједнако јако као и сва остала. Зато се као услов кавзислучајности најчешће наводи управо овај услов, будући је најлакши за проверу. У наредном делу рада ћемо показати импликације која важе између ових тврђења, и тиме доказати да су она еквивалентна.

3.2 Доказ еквиваленције

У наредном делу рада ћемо показати неколико импликација које важе међу овим тврђењима, да бисмо доказали да су заправо међусобно еквивалентни:

Лема 3.2.1. $P_1(s+1) \implies P_1(s)$

Доказ: Нека је T граф који има s чворова. За њега доказујемо да се појављује очекиван број пута. Посматрајмо графове $T'_1, T'_2, T'_3 \cdots T'_{2^s}$ које се добијају тако што се графу T дода један чвор (постоји 2^s таквих графова јер за тај нови чвор постоји 2^s могућности са ким је повезан („да” и „не” за сваки већ постојећи чвор)). Сада знамо:

$$N^*_G(T'_i) = (1+o(1))n^{s+1}2^{-\binom{s+1}{2}}.$$

Даље рачунамо колико пута се појављује T у графу. За свако појављивање неког T'_i се T тачно једном појави, с обзиром на то да смо бројали све графове са $s+1$ чворова чији је T подграф, сумирањем по свим $i \in [1, 2^s]$ бројаћемо свако појављивање T тачно $n-s$ пута. Онда знамо

$$N^*_G(T) = (1+o(1))n^{s+1}2^{-\binom{s+1}{2}}\frac{2^s}{n-s} = (1+o(1))n^{s+1}2^{-\binom{s}{2}}\frac{1}{n-s} = (1+o(1))n^{s}2^{-\binom{s}{2}},$$

што је управо $P_1(s)$. □

Лема 3.2.2. $P_1(2t) \implies P_2(2t)$

Доказ: Овај доказ се састоји из два дела: доказати $e(V) \geq (1+o(1))\frac{n^2}{4}$ и доказати $N_G(C_t) \leq (1+o(1))(\frac{n}{2})^t$. Прво ћемо доказати друго тврђење. Знамо да је циклус подграф $2^{\frac{2t(2t-3)}{2}}$ различитих графова са C_{2t} као подграфом (свака грана ван циклуса може да буде или не буде у том графу). Слично претходном доказу, сумирајући по овим графовима, сваки циклус бројимо тачно једном (јер га тачно један скуп грана допуњава до већег графа) па имамо

$$N_G(C_{2t}) = (1+o(1))n^{2t}2^{-\binom{2t}{2}}2^{\frac{2t(2t-3)}{2}} = (1+o(1))\left(\frac{n}{2}\right)^{2t}.$$

Сада доказујемо први део. На основу леме 3.2.1 важи $P_1(3)$. Означићемо са H_i граф са три темена и i грана. Сада ћемо уочити да важи следеће тврђење

$$\sum_v (n-2)d(v) = N^*_G(H_1) + 2N^*_G(H_2) + N^*_G(H_3).$$

Ова једнакост важи јер броји тројке (u, v, w) где су u и v повезани граном (за дато u имамо $d(u)$ начина да изаберемо v и $n-2$ да изаберемо w као неки од преосталих чворова). Постоји бијекција која ово слика у десну страну јер је појављивања свако појављивање H_1 и H_3 јединствено одређено, а свако појављивање H_2 се рачуна два пута (у зависности да ли је друга грана (u, w) или (v, w)). Одавде из $P_1(3)$ важи тврђење

$$\sum_v (n-2)d(v) = N^*_G(H_1) + 2N^*_G(H_2) + N^*_G(H_3) = (1+o(1))\frac{n^3}{2}.$$

Како је $e(V) = \sum_v d(v)$, дељењем ове релације са $n-2$ добијамо

$$e(V) = (1+o(1))\frac{n^2}{4}$$

Одавде смо доказали $P_2(2t)$. □

Лема 3.2.3. $P_2(4) \implies P_3$

Доказ: Као што смо већ рекли, знамо да су $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ сопствене вредности матрице инциденције A нашег графа. Нека је вектор

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

За сваку симетричну матрицу је познато да важи

$$\lambda_1 = \sup_{u \neq 0} \frac{\langle Au, u \rangle}{\langle u, u \rangle}$$

па важи

$$\lambda_1 \geq \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{\sum_u d(u)}{n} = \frac{2e(V)}{n} = (1+o(1))\frac{n}{2}$$

Даље једнакости су следиле јер $\langle Av, v \rangle$ представља суму бројева у матрици, јер вектор Av има вредности сума бројева у свакој колони матрице A, а при скаларном множењу те матрице са v се сабирају елементи у њој; сумирају елементи у целој матрици. Наставак доказа се заснива на величини $tr(A^4)$. Познато је да ако је λ сопствена вредност M онда је λ^2 сопствена вредност M^2,а самим тим и λ^4 за M^4. Стога знамо да су $\lambda_1^4 \geq \lambda_2^4 \geq \cdots \geq \lambda_n^4$. Сада по леми 2.2.2 важи

$$tr(A^4) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^4.$$

Сада ћемо израчунати $tr(A^4)$ на још један начин. Наиме, вредност у пољу (i, j) матрице A^m је број различитих начина да се дође од чвора i до чвора j са тачно m грана. Доказ овога је индуктиван (база индукције је тачна по дефиницији матрице инциденције, а индуктивни корак следи директно из дефиниције множења матрица). Овим видимо да је сума на главној дијагонали матрице A^4 (вредност $tr(A^4)$) управо број начина да од неког чвора кренемо и да се вратимо у тај исти чвор после 4 гране. Дакле,$tr(A^4)$ је једнак броју C_4 уз грешку која је $o(n^4)$ (која настаје због дегенерисаних копија C_4), па је стога

$$tr(A^4) = N_G(C_4) + o(n^4) \leq (1 + o(1))\frac{n^4}{16}.$$

Одавде закључујемо

$$(1 + o(1))\frac{n^4}{16} \geq tr(A^4) = \lambda_1^4 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^4 \geq (1 + o(1))\frac{n^4}{16} + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^4$$

па нам коначно важи

$$\lambda_1 = (1 + o(1))\frac{n}{2}$$

и

$$\sum_{i=2}^{n} \lambda_i^4 = o(n^4) \implies |\lambda_2| = o(n)$$

што је управо P_3. □

Лема 3.2.4. $P_2(2t) \implies P_3$

Доказ: Доказ ове леме је скоро исти као $P(2t)$, али је ту зарад комплетности рада. једино што се посматра траг матрице A^{2t} па је

$$tr(A^{2t}) = N_G(C_{2t}) + o(n^{2t})$$

и

$$tr(A^{2t}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{2t},$$

из чега се на сличан начин завршава доказ. □

Овде вреди напоменути да овај исти доказ не може да се спроведе за циклусе непарне дужине C_t, јер је битно да су вредности λ_i^t позитивне, што нам се гарантује само за парно t. За графове који испуњавају $P_2(t)$ за непарно t је могуће конструисати контрапример.

Лема 3.2.5. $P_3 \implies P_4$

Доказ: Прво ћемо доказати регуларност степена овог графа. Ако поново уочимо

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

знамо да важи

$$||Av|| \leq \lambda_1 ||v||.$$

Одатле видимо да важи

$$\sum_v (d(v))^2 \leq (1 + o(1)) \frac{n^3}{4},$$

јер су вредности у матрици Av управо вредности $d(v)$, као што је коментарисано у претходном доказу. Међутим, по услову P_3 знамо да важи

$$e(V) = \frac{\sum_u d(u)}{2} \geq (1 + o(1)) \frac{n^2}{4},$$

па по Коши-Шварцу знамо да је

$$(1 + o(1)) \frac{n^3}{4} \geq \sum_v (d(v))^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_v d(v) \right)^2 = (1 + o(1)) \frac{n^3}{4},$$

а одатле јасно видимо да важи

$$\sum_v d(v) = (1 + o(1)) \frac{n^2}{2} \implies \sum_v \left| d(v) - \frac{n}{2} \right| = o(n^2).$$

Из овога такође следи да су све осим $o(n)$ вредности $d(n)$ имају вредност $(1 + o(1))\frac{n}{2}$. Дефинишимо $e_1, e_2, \cdots, e_n$ скуп ортонормалних сопствених вектора λ_i из A, јединичне норме. Нека је $u = \frac{1}{\sqrt{n}} v$. Циљ сада нам је да докажемо да важи $||u - e_1|| = o(1)$. Нека су $a_1, a_2, \cdots, a_n$ скалари тако да важи $u = \sum_i a_i e_i$, Онда важи $Au = \sum_i a_i \lambda_i e_i$. По поступку из доказа леме 3.2.3 знамо да важи да је i-та вредност у вектору Au управо $\frac{d(v_i)}{\sqrt{n}}$, где су $v_1, v_2, \cdots v_n$ чворови G. Сада знамо да вектор Au има све осим $o(n)$ елемената да су величине $\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \sqrt{n}$, што значи да постови вектор w тако да је

$$Au = \left(\frac{1}{2} + o(1) \right) n \cdot u + w,$$

где w има све осим $o(n)$ елемената вектора w припадају $o(\sqrt{n})$, што значи да је $||w|| = o(n)$. Уочимо да важи

$$\sum(\lambda_i - \frac{n}{2})a_i e_i = w + u \cdot o(n).$$

Рачунајући норму обе стране имамо

$$\sqrt{o(1) \cdot (\sum a_i) + \sum_{i \neq 1} \frac{n^2 a_i^2}{4}} = ||w + u \cdot o(1)|| = o(n),$$

јер по P_3 важи да су све сопствене вредности осим λ_1 у $o(n)$, а како је $\lambda_1 = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) n$, тај члан нам нестаје у другој суми. Из чега нам следи да је $\sum_{i \neq 1} a_i^2 = o(1)$. Сада примећујемо $u = a_1 e_1 + w_1$, при чему је интензитет $||w_1|| = \sqrt{a_2^2 + \cdots + a_n^2} = o(1)$. Како знамо да је $||u|| = ||e_1|| = 1$, знамо да је $|a_1| = 1 + o(1)$. По Фробениусовој теореми, сваки коефицијент уз e_1, мора бити позитиван. Одавде $a_1 = 1 + o(1)$, па је $||u - e_1|| = o(1)$, што је и требало показати. Сада уведимо s, као карактеристични вектор неког скупа С, што значи да је $s_i = 1$ ако и само ако $v_i \in S$, а у супротном је $s_i = 0$. Дефинисаћемо $s' = s - \langle s, e_1 \rangle e_1$. Сада, тривијално важи да је $\langle s', e_1 \rangle = 0$, па стога мора да важи

$$\langle As', s' \rangle \leq |\lambda_2| \cdot ||s'||^2.$$

Знамо да важи

$$||s'||^2 = ||s - \langle s, e_1 \rangle e_1||^2 = ||s||^2 - 2\langle s, e_1 \rangle^2 + \langle s, e_1 \rangle^2 \leq ||s||^2 = |S|,$$

и

$$\langle As', s' \rangle = \langle As, s \rangle - 2\langle s, e_1 \rangle \langle As, e_1 \rangle + \langle s, e_1 \rangle^2 \langle Ae_1, e_1 \rangle = 2e(S) - \lambda_1 \langle s, e_1 \rangle^2.$$

Ова једнакост важи јер је у вектору Av i-та вредност број чворова из S са којим је v_i повезан, а $\langle As, s \rangle$, сума тих вредности по елементима S, па је то управо $2e(S)$, и јер је $\lambda_1 = \langle Ae_1, e_1 \rangle$ и $\lambda_1 \cdot \langle s, e_1 \rangle = \langle As, e_1 \rangle$. Сада треба да израчунамо вредност $\langle s, e_1 \rangle$, што можемо на следећи начин

$$\langle s, e_1 \rangle = \langle s, u + w_1 \rangle = \langle s, u \rangle + \langle s, w_1 \rangle = \frac{|S|}{\sqrt{n}} + \langle s, w_1 \rangle.$$

Већ смо доказали да је $||w_1|| = o(1)$, па важи $|\langle s, w_1 \rangle| \leq ||s|| \cdot ||w_1|| = o(\sqrt{|S|})$. Зато имамо

$$\langle s, e_1 \rangle = \frac{|S|}{\sqrt{n}} + o(\sqrt{|S|}).$$

Користећи све добијене неједнакости добијамо

$$\langle As', s'\rangle = 2e(S) - \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)|S|^2 + o(n^2) \leq \lambda_2||s'||^2 \leq |S| \cdot o(n) = o(n^2).$$

Одатле нам следи

$$e(S) = \frac{|S|^2}{4} + o(n)^2$$

за сваки скуп чворова S, што је право P_4. □

Тривијално важи да је $P_4 \implies P_5$, али је изненађујућа чињеница да важи и обрнуто тврђење:

Лема 3.2.6. $P_5 \implies P_4$

Доказ: Циљ нам је да докажемо ако за фиксно ϵ, за сваки скуп $S \subset V$ величине $|S| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ важи

$$\left| e(S) - \frac{n^2}{16} \right| \leq \epsilon n^2$$

онда за сваки $S \subset V$ важи

$$\left| e(S) - \frac{1}{2}\binom{|S|}{2} \right| \leq 20\epsilon n^2.$$

Поделићемо доказ у два случаја у зависности $|S|$:

(i): $|S| \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Сумираћемо величину $e(S')$ по свим $S' \subset S$ са $|S'| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Тада сваку грану бројимо $\binom{|S|-2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}$ пута, јер су нам два чвора фиксирана, а имамо толико начина да изаберемо остале у скупу S'. Тада

$$e(S) = \frac{\sum_{S' \subset S} e(S')}{\binom{|S|-2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}} \leq \frac{\binom{|S|}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\binom{|S|-2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}} \left(\frac{n^2}{16} + \epsilon n^2 \right) = \frac{|S|(|S|-1)}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)} \left(\frac{n^2}{16} + \epsilon n^2 \right) \leq \binom{|S|}{2}(\frac{1}{2} + 8\epsilon)$$

Слично важи и

$$e(S) = \frac{\sum_{S' \subset S} e(S')}{\binom{|S|-2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}} \geq \frac{\binom{|S|}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{\binom{|S|-2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2}} \left(\frac{n^2}{16} - \epsilon n^2 \right) = \frac{|S|(|S|-1)}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)} \left(\frac{n^2}{16} - \epsilon n^2 \right) \geq \binom{|S|}{2}(\frac{1}{2} - 8\epsilon)$$

Стога је овај доказ завршен.

(ii)$|S| < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Претпоставимо да тврђење не важи, то јест да постоји скуп S тако да је

$$e(S) \geq \frac{1}{2}\binom{|S|}{2} + 20\epsilon n^2$$

(други случај $e(S) \leq \frac{1}{2}\binom{|S|}{2} - 20\epsilon n^2$ се доказује аналогно). Сада посматрајмо скуп $\overline{S} = V \backslash S$. По првом случају имамо

$$\binom{n-|S|}{2}\left(\frac{1}{2} - 8\epsilon\right) \leq e(\overline{S}) \leq \binom{n-|S|}{2}\left(\frac{1}{2} + 8\epsilon\right)$$

Сада, јасно је да важи

$$e(S, \overline{S}) = e(V) - e(S) - e(\overline{S})$$

где је $e(S, \overline{S})$ представља број грана између S и $\overline{S}$. Примењујемо опет идеју сумирања на све скупове који допуњавају скуп S до кардиналности $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, то јест сумираћемо $e(S \cup S')$ по свим $S' \subset \overline{S}$ за које важи $|S'| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S|$. Тада оне гране из $e(S)$ бројимо $\binom{n-|S|}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S|}$ пута (у сваком сабирку сваку такву грану бројимо тачно једном), гране из $e(\overline{S})$ бројимо $\binom{n-|S|-2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S| - 2}$ пута (јер треба да изаберемо та два чвора у тој грани коју гледамо, а преостале можемо на оволико начина) и гране из $e(S, \overline{S})$ бројимо тачно $\binom{n-|S|-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S| - 1}$ пута (јер треба да изаберемо тај један чвор, а остатак скупа можемо на оволико начина). Имајући у виду да по првом случају имамо $e(V) \geq \binom{n}{2}(\frac{1}{2} - 8\epsilon)$, сада сумирамо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e(S' \cup S)) = {} & \frac{\sum_{S' \subset \overline{S}} e(S' \cup S)}{\binom{n-|S|}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S|}} = \\
= {} & \frac{e(S)\binom{n-|S|}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S|} + e(\overline{S})\binom{n-|S|-2}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S| - 2} + e(S, \overline{S})\binom{n-|S|-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S| - 1}}{\binom{n-|S|}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S|}} \geq \\
\geq {} & e(S) + \frac{(n-|S|)(n-|S|-1)}{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S|)(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S| - 1)} e(\overline{S}) + \frac{n-|S|}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S|} e(S, \overline{S}) = \\
= {} & \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S|} e(S) - \frac{(n-|S|)\lceil \frac{n}{2} \rceil}{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S|)(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S| - 1)} e(\overline{S}) + \frac{n-|S|}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S|} e(V) \geq \\
\geq {} & \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S|}\left(\frac{1}{2}\binom{|S|}{2} + 20\epsilon n^2\right) - \\
& \frac{(n-|S|)\lceil \frac{n}{2} \rceil}{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S|)(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S| - 1)}\binom{n-|S|}{2}\left(\frac{1}{2} + 8\epsilon\right) + \\
& \frac{n-|S|}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - |S|}\binom{n}{2}\left(\frac{1}{2} - 8\epsilon\right) \geq \\
\geq {} & \frac{n^2}{16} + \epsilon n^2,
\end{aligned}$$

Али то, по Дирихлеовом принципу значи да за бар један скуп $S \subset V$ кардиналности $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ важи да је

$$e(S) \geq \frac{n^2}{16} + \epsilon n^2,$$

што нам је коначна контрадикција.

Лема 3.2.7. $P_4 \implies P_6$

Доказ: Први део овог доказа је да докажемо да ако важи тврђење P_4, које ћемо у овом доказу коистити у погодном облику да за сваки подскуп $S \in V$ важи

$$\left|e(S) - \frac{|S|^2}{4}\right| < \frac{\epsilon^2 n^2}{3}$$

тада важи да су степени чворова око $\frac{n}{2}$. Конкретно ћемо доказивати да постоји мање од ϵn чворова графа G степена преко $\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)n$. Претпоставићемо супротно, да постоји скуп T са $t \geq \epsilon n$ чворова степена преко $(\frac{1}{2}+\epsilon)n$. Онда ако је $T' = V \backslash T$ од t' чворова. Тада по претпоставци P_4 изводимо

$$e(V) < \frac{n^2}{4} + \frac{\epsilon^2 n^2}{3}$$

$$e(T) < \frac{t^2}{4} + \frac{\epsilon^2 n^2}{3}$$

$$e(T') > \frac{(t')^2}{4} - \frac{\epsilon^2 n^2}{3}.$$

Сада уочимо идентитет

$$e(T') + \sum_{v \in T} d(v) = e(V) + e(T)$$

који важи јер обе стране броје све гране графа и још гране које спајају два темена из T двапут. Онда по претходним неједнакостима из идентитета важи

$$\frac{(t')^2}{4} - \frac{\epsilon^2 n^2}{3} + \left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) tn < \frac{n^2}{4} + \frac{\epsilon^2 n^2}{3} + \frac{t^2}{4} + \frac{\epsilon^2 n^2}{3}$$

што је еквивалентно са

$$\epsilon tn < \epsilon^2 n^2$$

што је контрадикција. Слично имамо да има мање од ϵn чворова са степеном мањеим од $\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)n$. Сада знамо да за скуп Y свих цвхорова чији степени нису у интервалу $\left(\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)n, \left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)n\right)$ важи $|Y| < 2\epsilon n$. Дефинишимо $V' = V \backslash Y$. Циљ нам је да докажемо

$$\sum_{u,v} \left||S(u,v)| - \frac{n}{2}\right| < 20\epsilon n^3$$

из чега ће директно следити P_6. За све парове $0 \leq i, j \leq 1$ дефинишимо функцију

$$f_{ij}(u, v) = |\{w \in V | G(u, w) = i \wedge G(v, w) = j\}|,$$

где је $G(u, v) = 1$ ако је грана uv у графу а $G(u, v) = 0$ у супротном. Сада, ако изаберемо $(i, j) \in \{(0, 0), (1, 1)\}$ и $(i', j') \in \{(0, 1), (1, 0)\}$ за произвољне чворове $u, v \in V'$ имамо

$$\left| f_{ij}(u, v) + f_{i'j'}(u, v) - \frac{n}{2} \right| < \epsilon n$$

јер нам сума ова два $f_{ij}, f_{i'j'}$ заправо броји $d(v)$ или $d(u)$ или $n - 1 - d(u)$ или $n - 1 - d(v)$ у зависности од тога који су i, j, i', j' изабрани. Из овога следи, по неједнакости троугла

$$|f_{11}(u, v) - f_{00}(u, v)| < 2\epsilon n.$$

Сада, за фиксно v дефинишимо скуп

$$X(v) = \{u \in V' : \big| |S(u, v)| - \frac{n}{2} \big| > 10\epsilon n\}.$$

Разликујемо даље два случаја:

(i): За свако $v \in V'$ важи $|X(v)| \leq 2\epsilon n$. Посматрајмо суму

$$\sum_v \left| |S(u, v)| - \frac{n}{2} \right|$$

за фиксно u. Када је $u \in V'$ ту суму можемо ограничити на следећи нацин:

$$\sum_v \left| |S(u, v)| - \frac{n}{2} \right| \leq 10\epsilon n^2 + 2\epsilon n^2 = 12\epsilon n^2,$$

јер за све сем максимално $2\epsilon n$ сабирака је ова вредност испод $10\epsilon n$, а остале сабирке можемо ограничити са n. Ако је $u \in Y$, тада то можемо ограничити најпростије као

$$\sum_v \left| |S(u, v)| - \frac{n}{2} \right| \leq n^2.$$

Користећи ово формирамо оцену

$$\sum_{u,v} \left| |S(u, v)| - \frac{n}{2} \right| = \sum_{u \in V'} \sum_v \left| |S(u, v)| - \frac{n}{2} \right| + \sum_{u \in Y} \sum_v \left| |S(u, v)| - \frac{n}{2} \right| \leq$$
$$\leq n \cdot 12\epsilon n^2 + 2\epsilon n \cdot n^2 = 14\epsilon n^3 \leq 20\epsilon n^3,$$

што нам завршава овај случај.

(ii): Постоји неко $v_0 \in V'$ за које важи $|X(v_0)| > 2\epsilon n$. Дефинишимо

$$X_1 = \left\{u \in X(v_0) : |S(v_0, u)| > \frac{n}{2} + 10\epsilon n\right\},$$

$$X_2 = \left\{u \in X(v_0) : |S(v_0, u)| < \frac{n}{2} - 10\epsilon n\right\}.$$

Како је $X(v_0) = X_1 \cup X_2$, и X_1, X_2 су дисјунктни, знамо да је $|X_1| + |X_2| = |X(v_0)| \geq 2\epsilon n$. Стога, знамо да је бар један од X_1, X_2 кардиналности бар ϵn. Разматраћемо само случај када је $|X_1| \geq \epsilon n$; други случај се ради на сличан начин. Сада, за сваки чвор $v \in X_1$, v је повезан граном са тачно $f_{11}(v_0, v)$ чворова из скупа $Nd(v_0)$. Како важи $|S(v_0, v)| > \frac{n}{2} + 10\epsilon n$, и како је $|f_{11}(v_0, v) - f_{00}(v_0, v)| < 2\epsilon n$ и очигледно $f_{11}(v_0, v) + f_{00}(v_0, v) = |S(v_0, v)|$, добијамо да важи

$$f_{11}(v, v_0) \geq \frac{|S(v_0, v)| - 2\epsilon n}{2} \geq \frac{n}{4} + 4\epsilon n.$$

Као у претходном доказу, нека је $e(X_1, Nd(v_0))$ скуп уређених парова (u, v) тако да грана uv постоји у графу и $u \in X_1, v \in Nd(v_0)$. Сумирајући претходну неједнакост по свим елементима X_1 добијамо

$$e(X_1, Nd(v_0)) \geq |X_1| \left(\frac{n}{4} + 4\epsilon n\right).$$

По претпоставци P_4, знамо да важи

$$e(X_1) > \frac{|X_1|^2}{4} - \frac{\epsilon^2 n^2}{3},$$

$$e(Nd(v_0)) > \frac{d(v_0)^2}{4} - \frac{\epsilon^2 n^2}{3},$$

$$e(X_1 \cap Nd(v_0)) < \frac{|X_1 \cap Nd(v_0)|^2}{4} + \frac{\epsilon^2 n^2}{3}.$$

Очимо идентитет $e(A \cup B) = e(A) + e(B) + e(A, B) - 3e(A \cap B)$, који важи за било које скупове чворова A, B, по принципу укључења и искључења. Тада знамо

$$\begin{aligned} e(X_1 \cup Nd(v_0)) = e(X_1) + e(Nd(v_0)) + e(X_1, Nd(v_0)) - 3(X_1 \cap Nd(v_0)) \geq \\ \geq \frac{|X_1|^2}{4} + \frac{|Nd(v_0)|^2}{4} + |X_1| \left(\frac{n}{4} + 4\epsilon n\right) - \\ \frac{\epsilon^2 n^2}{3} - \frac{3|X_1 \cap Nd(v_0)|^2}{4} \geq \\ \geq \frac{|X_1 \cup Nd(v_0)|^2}{4} + \epsilon^2 n^2. \end{aligned}$$

Последња неједнакост се може извести тако што се уведе $a = |e(X_1)|, b = |d(v_0)|, c = |X_1 \cap Nd(v_0)|$, али тај део није описан у овом раду јер је само рачун. Међутим, последња неједнакост је у контрадикцији са тврђењем P_4, што нам завршава овај доказ. $\square$

Лема 3.2.8. $P_6 \implies P_1(s)$

Доказ: Посматрајмо произвољни граф $H(s)$ са s чворова $\{v_1, v_2, \cdots, v_s\}$. Означимо граф $H(r)$, за $r \leq s$ као подграф од $H(s)$ са чворовима $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$. Индукцијом по r ћемо доказати да важи

$$N_r = N_G^*(H(r)) = (1 + o(1)) n_{(r)} 2^{-\binom{r}{2}}$$

где $n_{(r)} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)$ (до сада смо ово n_r „звали" само n^r јер кад је $n \gg r$ и кад је у питању мало o своди се на исту ствар, али у овој индукцији морамо бити мало пажљивији). Јасно је да за $r = s$ добијамо $P_1(s)$. База индукције $r = 1$ је тривијална. Даље ћемо наставити јаком индукцијом. Сада ћемо за вектор чворова $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) \in V^r$ и вектор $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_r) \in \{0, 1\}^r$ дефинисати функцију

$$f_r(\alpha, \epsilon) = \left| \left\{ v \in V | v \neq \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \ \wedge \forall i \in [1, r], G(v, \alpha_i) = \epsilon_i \right\} \right|$$

где је $G(u, v) = 1$ ако су је грана uv у графу G и $G(u, v) = 0$ у супротном. У суштини, $f_r(\alpha, \epsilon)$ за дати вектор чворова и дати скуп "наредби" броји колико постоји чворова ван α који су повезани са чворовима у α по наредбама из ϵ. Кључна идеја нам је да се функција $f_r(\alpha, \epsilon)$ понаша такође квазислучајно. Како очито постоји укупно 2^r избора за вектор ϵ и $n_{(r)}$ за вектор α, онда укупно имамо домен величине $n_{(r)} \cdot 2^r$. Очекујемо да је свака вредност f_r отприлике иста и једнака $\mathbb{E}(f_r)$. Ово очекивање се лако рачуна

$$\mathbb{E}(f_r) = \frac{\sum_{\alpha,\epsilon} f_r(\alpha, \epsilon)}{n_{(r)} \cdot 2^r} = \frac{\sum_{\alpha} \sum_{\epsilon} f_r(\alpha, \epsilon)}{n_{(r)} \cdot 2^r} = \frac{\sum_{\alpha} (n - r)}{n_{(r)} \cdot 2^r} = \frac{n - r}{2^r}$$

Овде смо користили да је $\sum_{\epsilon} f_r(\alpha, \epsilon) = n - r$ за фиксно α јер је за сваки чвор ван α доприноси тачно за једно ϵ. Да бисмо доказали да ниједна вредност не одступа превише од очекивања, увешћемо анализираћемо величину

$$S_r = \sum_{\alpha,\epsilon} f_r(\alpha, \epsilon) \cdot (f_r(\alpha, \epsilon) - 1).$$

Доказаћемо да важи

$$S_r = \sum_{u \neq v} |S(u, v)|_{(r)}.$$

Ово је тачно за сваки граф, без додатних претпоставки о квазислучајности. Доказаћемо да S_r броји уређене тројке $(\alpha, \epsilon, (u, v))$ такве да су и u и v повезани по датим правилима из ϵ, тј за u и v важи $G(u, \alpha_i) = G(v, \alpha_i) = \epsilon_i$. Прво ћемо избројати тако што фиксирамо α и ϵ. Очито за u имамо $f_r(\alpha, \epsilon)$, а за v имамо

$(f_r(\alpha,\epsilon)-1)$ (следи из дефиниције). Стога смо доказали да S_r броји ове тројке. Сада фиксирамо u и v. Пар (u,v) ће бити у тачно $|S(u,v)|_{(r)}$ бројаних тројки, јер ми чланове вектора α бирамо из скупа чворова за који важи $G(u,w)=G(v,w)$, којих има $|S(u,v)|$ по дефиници, а кад изаберемо r чланова из тог скупа за скуп α, вектор ϵ нам је јединствено одређен. Даље доказујемо

$$S_r=\sum_{u\neq v}|S(u,v)|_{(r)}=(1+o(1))n^{r+2}2^{-r}.$$

Уведимо $\epsilon_{uv}=|S(u,v)|-\frac{n}{2}$. Јасно је по претпоставци P_6 да важи $\sum_{u,v}|\epsilon_{uv}|=o(n^3)$ а како важи $|\epsilon_{u,v}|\leq\frac{n}{2}<n$, важи за свако $a\geq 1$ и

$$\sum_{u,v}|\epsilon_{uv}|^a\leq n^{a-1}\sum_{u,v}|\epsilon_{uv}|=o(n^{a+2})$$

Како нам је $(\frac{n}{2}+x)_{(r)}$ полином по x, постоје константе $c_1,c_2,\cdots,c_k$ такве да је $(\frac{n}{2}+x)_{(r)}=\sum_{k=0}^{r}c_k(\frac{n}{2})^k x^{r-k}$. Специјално, изаберимо $c=\max|c_1|,|c_2|,\cdots,|c_{r-1}|=O(1)$. Како је јасно да је $c_r=1$, важи

$$\begin{aligned}
S_r&=\sum_{u\neq v}|S(u,v)|_{(r)}=\sum_{u\neq v}\left(\frac{n}{2}+\epsilon_{uv}\right)_{(r)}=\sum_{u\neq v}\sum_{k=0}^{r}c_k\left(\frac{n}{2}\right)^k\epsilon_{uv}^{r-k}=\\
&=\sum_{u\neq v}\left(\frac{n}{2}\right)^r+\sum_{u\neq v}\sum_{k=0}^{r-1}c_k\left(\frac{n}{2}\right)^k\epsilon_{uv}^{r-k}=\left(\frac{n}{2}\right)^r n_{(2)}+\sum_{u\neq v}\sum_{k=0}^{r-1}c_k\left(\frac{n}{2}\right)^k\epsilon_{uv}^{r-k}\leq\\
&\leq\left(\frac{n}{2}\right)^r n_{(2)}+\sum_{u\neq v}\sum_{k=0}^{r-1}|c_k|\left(\frac{n}{2}\right)^k|\epsilon_{uv}|^{r-k}\leq n^{r+2}2^{-r}+c\sum_{u\neq v}\sum_{k=0}^{r-1}n^k|\epsilon_{uv}|^{r-k}=\\
&=n^{r+2}2^{-r}+c\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{u\neq v}n^k|\epsilon_{uv}|^{r-k}=n^{r+2}2^{-r}+c\sum_{k=0}^{r-1}n^k\sum_{u\neq v}|\epsilon_{uv}|^{r-k}=\\
&=n^{r+2}2^{-r}+c\sum_{k=0}^{r-1}n^k\cdot o(n^{r-k+2})=n^{r+2}2^{-r}+c\cdot r\cdot o(n^{r+2})=\\
&=(1+o(1))n^{r+2}2^{-r}.
\end{aligned}$$

Сада смо спремни да докажемо да су све вредности f_r блиске очекиваној:

$$\sum_{\alpha,\epsilon}(f_r(\alpha,\epsilon)-\mathbb{E}(f_r))^2=\sum_{\alpha,\epsilon}f_r^2(\alpha,\epsilon)-2\sum_{\alpha,\epsilon}\mathbb{E}(f_r)\cdot f_r(\alpha,\epsilon)+\sum_{\alpha,\epsilon}\mathbb{E}^2(f_r)=$$

$$=\sum_{\alpha,\epsilon}(f_r^2(\alpha,\epsilon)-f_r(\alpha,\epsilon))+\sum_{\alpha,\epsilon}f_r(\alpha,\epsilon)-2\cdot n_{(r)}\cdot 2^r\cdot\mathbb{E}^2(f_r)+n_{(r)}\cdot 2^r\cdot\mathbb{E}^2(f_r)=$$

$$= S_r + n_{(r+1)} - n_{(r)}2^r(n-r)^2 2^{-2r} = o(n^{r+2})$$

Приметимо да се N_{r+1} добија као сумација N_r различитих сабирака облика $f_r(\alpha,\epsilon)$, јер је свако појављивање графа $H(r+1)$ представљено као појављивање графа $H(r)$ (што нам даје N_r начина да изаберео α) и још избором једног чвора за који тачно знамо са којима је из α повезан (јединствен избор ϵ). Означимо овај скуп парова (α,ϵ) са T. Стога имамо

$$|N_{r+1} - N_r\mathbb{E}(f_r)|^2 = \left|\sum_{t\in T}(f(t) - \mathbb{E}(f_r))\right|^2.$$

Сада по Коши-Шварцу, или по неједнакости између аритметичке и квадратне средине имамо

$$|N_{r+1}-N_r\mathbb{E}(f_r)|^2 \leq N_r\sum_{t\in T}(f(t)-\mathbb{E}(f_r))^2 \leq N_r\sum_{\alpha,\epsilon}(f(\alpha,\epsilon)-\mathbb{E}(f_r))^2 = N_r\cdot o(n^{r+2}) = o(n^{2r+2})$$

Коначно, по индукцијској хипотези имамо:

$$N_{r+1} = N_r\cdot\mathbb{E}(f_r) + o(n^{n+1}) = (1+o(1))n_{(r)}2^{-\binom{r}{2}}\cdot(n-r)2^{-r} + o(n^{r+1})$$

$$N_{r+1} = (1+o(1))n_{(r+1)}2^{\binom{r+1}{2}}$$

чиме је индуктивни корак, и сам доказ готов. □

4

Ремзијеви бројеви

У даљем делу рада разматраћемо горњу оцену за Ремзијеве бројеве. Ремзијев број $r(k,l)$ означава најмањи број n, тако да за сваки комплетан граф са n темена чије су гране обојене у црвено и плаво постоји или потпун црвен подграф са k чворова или потпун плави подграф са l чворова. Комплетан граф са t чворова ћемо надаље означавати са уобичајеном ознаком K_t. Овај проблем заправо каже да за сваки граф са бар $r(k,l)$ чворова или постоји клика величине k или независан скуп величине l. Међутим, чак иако се зна да ови бројеви постоје (што ћемо доказати у следећем одељку), одређивање тачних вредности је врло тежак (нерешен) математички проблем, који је и даље актуелан. Посебно је важан проблем одређивања дијагоналних Ремзијевих бројева који су облика $r(k,k)$.

4.1 Доказ постојања горње оцене

Сада ћемо дати кратак доказ за најпознатију оцену Ремзијевих бројева која каже

$$r(k+1,l+1) \leq \binom{k+l}{l}.$$

Заправо доказаћемо једну другачију неједнакост

$$r(k+1,l+1) \leq r(k+1,l) + r(k,l+1),$$

а из тога и Паскаловог троугла, индуктивно закључујемо оцену (а самим тим ће важити да постоје $r(k,l)$). Претпоставимо да неки граф са $n = r(k+1,l) + r(k,l+1)$ чворова нема ниједан црвени K_{k+1} и ниједан плави K_{l+1}. Посматрајмо произвољни чвор овог графа. Приметимо да он не сме да има $r(k,l+1)$ црвених суседа јер би онда иначе постојао или плави K_{l+1} или црвени K_k, који ће са овим чвором образовати цео K_{k+1}. Слично, овај чвор не сме да има $r(k+1,l)$ плавих суседа. Стога овакав граф може имати максимално $(r(k+1,l)-1)+(r(k,l+1)-1)+1 = r(k+1,l)+r(k,l+1)-1$ чворова, што је контрадикција.

Осврнимо се још једном на овај доказ. Добили смо оцене за дијагоналне бројеве реда величине $4^{n+o(1)}$ (јер је $\binom{2k}{k} \geq \frac{2^{2n}}{2k+1}$). Интересантно је да све познате оцене још увек припадају овој фамилији. Циљ нам је да тражимо оцену у облику $r(k+1,l+1) \leq f(k,l)\binom{k+l}{k}$, за неко $f(k,l)=o(1)$. У претходном доказу се осећа да има доста места за напредак, јер имамо неки глобални услов (да сваки довољно велики подграф има потпун црвени K_{k+1} или плави K_{l+1}), који потом искористимо на врло локалан начин (гледајући само гране из једног чвора). Видимо да када граф има нешто мање од $r(k+1,l)+r(k,l+1)$ чворова, граф је све више одређен, у смислу да мора да још увек има испод $r(k+1,l)$ плавих и $r(k,l+1)$ црвених грана. Стога ће се за сваки чвор број плавиих и црвених грана односити приближно као $\binom{k+l-1}{k} : \binom{k+l-1}{k-1}$, што је заправо једнако $l : k$. Ово значи да ће граф састављен од црвених грана бити такав да сваки чвор има приближно исти степен. Ово нас доводи до идеје да је овај граф заправо квазислучајан.

4.2 Томасонов рад

У наредном делу ћемо представити кључну лему којом је математичар Томасон 1988. побољшао познату горњу оцену. Он исто тражи оцену у облику $f(k,l)\binom{k+l}{k}$.

Теорема 4.2.1. Нека су γ и δ реални бројеви, нека је функција f^* дефинисана као $\lfloor f(k,l)\binom{k+l}{k}\rfloor = f^*(k,l)\binom{k+l}{k}$, и нека је $n = f^*(k,l)\binom{k+l}{k}$. Нека за $m \in \{1,2\}$ важе следеће неједнакости:

$$r(k+1-m,l+1) \leq f(k-m,l)\binom{k-m+l}{k-m} \tag{4.1}$$

$$r(k+1,l+1-m) \leq f(k,l-m)\binom{k+l-m}{k}, \tag{4.2}$$

$$\frac{f(k-m,l)}{f^*(k,l)} \leq 1+m\gamma, \tag{4.3}$$

$$\frac{f(k,l-m)}{f^*(k,l)} \leq 1+m\delta \tag{4.4}$$

Ако за свако реално s у интервалу $[-l\delta, k\gamma]$ важи неједнакост

$$3(k+l-1)^2+s\left((k-l)(k+l-1)-k(k-1)\gamma+l(l-1)\delta\right)+kl-2k^2(k-l)\gamma-2l^2(l-1)\delta >$$

$$> \frac{k+l}{n}\left((k+l-1)(2l-k-3s) - l(l-1)(1+2\delta) - \frac{(k+l)(k+l-1)}{n}\right)$$

тада важи

$$r(k+1,l+1) \le n \le f(k,l)\binom{k+l}{k}$$

Доказ: Претпоставимо да постоји бојење K_n у плаво и црвено, тако да не постоје црвени K_{k+1} и плави K_{l+1}. Нека је d_i црвени степен i-тог чвора. Сада као у претходном доказу можемо да добијемо $d_i \le r(k,l+1)-1 < f(k-1,l)\cdot\binom{k+l-1}{k-1} \le \frac{kn}{k+l}(1+\gamma)$. Слично томе, $n-1-d_i \le r(k,l+1)-1$, стога $d_i \ge n - r(k+1,l) \ge n - f(k,l-1)\binom{k+l-1}{k} \ge n - \frac{ln}{l+k}(1+\delta) = \frac{kn}{k+l}(1-\frac{l\delta}{k})$. Дефинишимо d као просек свих степена $nd = \sum_{i=1}^{n} d_i$, а дефинишимо s као $nd = \frac{kn^2}{k+l}(1+\frac{s}{k})$. Сада очито важи $\frac{kn^2}{k+l}(1+\frac{s}{k}) \le \frac{kn^2}{k+l}(1+\gamma)$, па $s \le k\gamma$. Слично $\frac{kn^2}{k+l}(1+\frac{s}{k}) \ge \frac{kn^2}{k+l}(1-\frac{l\delta}{k})$, па $s \ge -l\delta$. Онда важи $s \in [-l\delta, k\gamma]$.

Доказаћемо сада једну формулу која важи за троуглове у графу. Нека је x број троуглова у графу чије су све гране исте боје, а y број троуглова које имају две гране исте боје, а трећу грану различите боје. Укупно је троуглова $\binom{n}{3}$, па важи

$$x + y = \binom{n}{3}.$$

Бројећи монохроматске путеве дужине 2, видимо да сваки монохроматски троугао има три таква пута у себи, док сваки остали има тачно један. Бројећи монохроматске путеве дужине 2 преко средњег чвора знамо да је њих $\sum_{i=1}^{n}\binom{d_i}{2} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1-d_i}{2}$. Стога добијамо

$$3x + y = \sum_{i=1}^{n}\binom{d_i}{2} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1-d_i}{2}.$$

Одатле имамо да је број монохроматских троуглова

$$x = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\binom{d_i}{2} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1-d_i}{2} - \binom{n}{3}\right).$$

Применом Јенсенове неједнакости на биномни коефицијент $\binom{x}{2}$, добиијамо

$$x \ge \frac{1}{2}\left(n\binom{d}{2} + n\binom{n-1-d}{2} - \binom{n}{3}\right).$$

Сада приметимо да ниједна црвена грана не сме бити у $r(k-1,l+1)$ црвених троуглова, јер би у супротном међу тим ,,трећим тачкама", постојао црвени K_{k-2}, који би са тачкама ове гране градио контрадикторни K_k. Слично, ниједна плава грана не сме бити у $r(k+1,l-1)$ плавих троуглова. Стога ако је c црвених грана, црвених троуглова има највише $\frac{c}{3}\cdot(r(k-1,l+1)-1)$, сумирајући претходно тврђење по свим гранама (делимо са 3 јер сваки троугао бројимо 3 пута; једном за сваку његову страну). Слично, ако је p број плавих грана, плавих троуглова је највише $\frac{p}{3}\cdot(r(k+1,l-1)-1)$. Како је $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2c = nd$ и $\sum_{i=1}^{n}(n-1-d_i) = 2p = n(n-1-d)$, добијамо

$$\begin{aligned} x \leq & \frac{1}{3}\left(c\left(r(k-1,l+1)-1\right)+p\left(r(k+1,l-1)-1\right)\right)= \\ &= \frac{1}{6}(dn\cdot r(k-1,l+1)+(n-1-d)n\cdot r(k+1,l-1)-2c-2p) \leq \\ &\leq \frac{n}{6}\left(dn\frac{k(k-1)}{(k+l)(k+l-1)}\frac{f(k-2,l)}{f^{*}(k,l)}+(n-1-d)n\frac{l(l-1)}{(k+l)(k+l-1)}\frac{f(k,l-2)}{f^{*}(k,l)}-(n-1)\right) \leq \\ &\leq \frac{n^2}{6(k+l)(k+l-1}\left(dk(k-1)(1+2\gamma)+(n-1-d)(l-1)(1+2\delta)\right)-\frac{n(n-1)}{6} \end{aligned}$$

Сада комбиновањем ових неједнакости за x, множећи их са $\frac{6(k+l-1)(k+l)^2}{n^3}$, и мењајући d са $\frac{kn}{k+l}(1+\frac{s}{k})$ добијамо

$$\begin{aligned} 3(k+l-1)^2+s((k-l)(k+l-1)-k(k-1)\gamma+l(l-1)\delta)+kl-2k^2(k-l)\gamma-2l^2(l-1)\delta \leq \\ \leq \frac{k+l}{n}((k+l-1)(2l-k-3s)-l(l-1)(1+2\delta)-\frac{(k+l)(k+l-1)}{n}) \end{aligned}$$

што је тражена контрадикција. $\square$

Будући да ова теорема и њен доказ делују компликовано, сада ћемо укратко објаснити зашто нам ово заправо даје бољу оцену од првобитног доказа. За то је довољно да погледамо шта се дешава у случају када $f(k,l)=1$, и да докажемо да оцене нису оштре ту. Пишемо $a=r(k-1,l+1), b=r(k,l), c=r(k+1,l-1)$, и претпостављамо $r(k,l+1)=a+b, r(k+1,l)=b+c, n=r(k+1,l+1)=a+2b+c$. У том случају је

$$x=\frac{1}{2}\left(n\binom{a+b-1}{2}+n\binom{b+c-1}{2}-\binom{n}{3}\right),$$

али такође по горњој оцени за x имамо

$$x \leq \frac{1}{6}(n\cdot(a+b)\cdot a+n\cdot(b+c)\cdot c-n\cdot(a+b)-n\cdot(b+c)),$$

Када размножимо обе стране, видимо да се кубни фактори скрате, а да у квадратним факторима настаје разлика.

Даље у свом раду Томасон позабавио тражењем адекватне функције која испуњава задате услове, и на крају је стигао до оцене да постоји константа A тако да за $k \geq l$ важи

$$r(k+1,l+1) \leq \exp\{-\frac{l}{2k}\log k + A\sqrt{\log k}\}\binom{k+l}{k}$$

$$r(k+1,k+1) \leq k^{-\frac{1}{2}+\frac{A}{\sqrt{\log k}}}\binom{2k}{k}$$

У даљем делу рада ћемо представити Конлонов рад, који се надограђује на Томасонову идеју, и налази тренутно најбољу познату горњу оцену за дијагоналне Ремзијеве бројеве.

4.3 Конлонов рад

Конлон се у свом раду уместо да се фокусира на троуглове фокусирао на комплетне подграфове величине r. Конкретно, лако се види генерализација наших доказа до сада по којој се добија да је сваки црвени K_{r-1} садржан у максимално $r(k-r+2,l+1)-1$ копија црвених K_r, а сваки плави K_{r-1} је садржан у највише $r(k+1,l-r+2)$ плавих K_r. Циљ Конлоновог рада је да нађе другачију горњу и доњу оцену за број појављивања монохроматских K_r. У Томасоновом доказу, ово је исто била идеја, само је он радио случај када је $r=3$, и тада постоји лакши начин да се добије доње ограничење за број монохроматских K_{r-1}. Овде захтева мало више рада. У овом делу рада ћемо представити Конлонове идеје којима је он ово постигао, али нећемо дати формалан доказ јер би то премашивало границе овог рада.

У Конлоновом раду, централно тврђење је слично ономе у Томасоновом (Теорема 4.2.1) где доказује да ако функција f испуњава неке услове онда је $f(k,l)\binom{k+l}{k} \geq r(k+1,l+1)$, при чему додаје да неједнакости (4.1),(4.2),(4.3),(4.4) које у Томасоновом раду важе за $m=1,2$, важи такође и за $m \leq r-1$ (и, наравно, мења оне услове који следе из доказа теореме). Конлон свој рад започиње увођењем функције g на паровима чворова која се за дату вредност p дефинише као

$$g(x,y) = R(x,y) - p$$

где је R функција која представља матрицу инциденције црвених грана. Обично је циљ узети да је p једнако густини графа, међутим овде се испостави да нам је из техничких разлог најпогодније да изаберемо $p = \frac{k}{k+l}$, и онда да доказујемо да одређени изрази са g узимају вредности близу нуле. Слично као што да

ниједан чвор не сме бити црвеним гранама повезан са $r(k, l+1)$ чворова, и ниједна црвена грана не сме бити део $r(k-1, l+1)$ црвених троуглова (и аналогним тврђењима за плаве гране) добијају се тврђења којим се ограничавају одоздо и одозго вредности одређених израза по g, за шта користимо да је граф квазислучајан.
Конлон потом приступа налажењу горње оцене за број црвених K_r подграфова. Ово постиже гледајући идентитет

$$\sum_{k_1,\cdots,x_r} \prod_{1\leq i,j\leq r} R(x_i, x_j) = \sum_{k_1,\cdots,x_r} \prod_{1\leq i,j\leq r} (p + g(x_i, x_j)) =$$

$$= \sum_{H\subset K_r} p^{\binom{r}{2}-e(H)} gH$$

где је за произвољни H подграф K_r (чији су чворови $v_1, v_2, \cdots, v_r$)

$$gH = \sum_{k_1,\cdots,x_r} \prod_{(v_i,v_j)\in E(H)} g(x_i, x_j).$$

Овај идентитет се доказује једноставним алгебарским манипулацијама.

Сада циљ рада пребацује на то да ограничи вредности gH. Ово ради (за графове који имају више од 3 чвора), одоздо и одозго по апсолутној вредности, помоћу квазислучајности функције g. Гледајући наша тврђења у поглављу 3, ово одговара својству P_1. Сада формира две оцене за број полављивања црвених K_r (доње и горње). Користећи оцене за gH одоздо, такође добија оцену за тражени број појављивања одозго. Са друге стране, користећи то да је се ниједан црвени K_{r-1} не може садржати у $r(k+2-r, l+1)$ црвених K_r, и користећи оцену за gH одозго, изводи кумулативну горњу оцену за исти број појављивања. Сада користећи исте оцене за плаве K_r и користећи чињеницу да је горња граница већа од доње границе (одузимање неједнакости) добија неке алгебарске неједнакости, чијим манипулацијама изводи леп облик ограничења функције на r.
У даљем делу рада, слично као Томасон, изводи што бољу функцију која задовољава услове које му је теорема наметнула, и изводи коначну теорему:

Теорема 4.3.1. За све ϵ за које важи $0 < \epsilon \leq 1$, постоји константа C_ϵ тако да, за свако $k \geq l \geq \epsilon k$,

$$r(k+1, l+1) \leq k^{C_\epsilon \frac{\log k}{\log\log k}} \binom{k+l}{k}.$$

Као последица тога, постоји константа C тако да важи

$$r(k+1, k+1) \leq k^{C \frac{\log k}{\log\log k}} \binom{2k}{k}.$$

5

Закључак

У првом делу овог рада смо увели квазислучајне графове и услове квазислучајности графа. Потом смо доказали еквиваленцију ових тврђења, користећи пуно различитих идеја и својстава графова, користећи чак и нека својства графова у линеарној алгебри.

У другом делу рада смо видели зашто су квазислучајни графови корисни, тако што смо применили њих у доказу оцене за један од најпознатијих комбинаторних проблема: Ремзијевих бројева. У овом делу је циљ било представити интуицију која стоји иза уочавања квазислучајног графа у одређеном комбинаторном проблему и како то даље користити то за решавање. Оно што је чинило овај доказ посебно интересантним јесте чињеница да је у овом проблему најбоља позната оцена постигнута користећи идеје које су главна тема овог рада.

Хтео бих овом приликом да се захвалим свом ментору, Луки Милићевићу, који је увек био доступан за помоћ и консултације око рада, препоручивао ми литературу и први ми представио квазислучајне графове чиме је подстакао моје интересовање.

Такође бих волео да се захвалим свим професорима који су ми предавали математику током мог школовања у Математичкој гимназији, јер су продубили моју већ постојећу љубав према математици.

Литература

[1] F. K. R. Chung, R. L. Graham R.M. Wilson, *Quasi-random graphs*, Combinatorica Akadĕmiai Kiadŏ Springer-Verlag (1988)

[2] N. Alon, J. H. Spencer, *The Probabilstic Method*, John Wiley & Sons Inc. (1992)

[3] A. Thomason, *An Upper Bound for Some Ramsey Numbers*, Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom (1988)

[4] D. Conlon, *A New Upper Bound for Diagonal Ramsey Numbers*, Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom